La Géométrie : quel objet ? quels objets ?

Des zigzags dans la machine à explorer le temps

Journée départementale des Mathématiques
Montbard, école Paul Langevin
Mercredi 27 Mars 2024

Frédéric Métin,
INSPÉ & IREM de Dijon

~ I

18 mars 2024

Passage Darcy, Dijon
23 mai 2023

rue Georges Thill, Paris 19
5 octobre 2023

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté • Égalité • Fraternité

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

éduscol Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

> MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Espace et géométrie au cycle 3

- Acquérir des connaissances et compétences utiles pour la vie quotidienne :
- Acquérir des connaissances et des automatismes pour la suite de la scolarité
- Acquérir des connaissances utiles en milieu professionnel
- Renforcer les aptitudes à raisonner et à argumenter dans toutes les disciplines

La géométrie euclidienne est, depuis des siècles, un outil de formation sans égal pour s'exercer à la logique et au raisonnement. Elle se fonde, en effet, sur cinq axiomes[1] d'où découlent des théorèmes et propriétés qui serviront eux-mêmes à en construire de nouveaux ; chaque élément de l'édifice peut ainsi être démontré.

2024

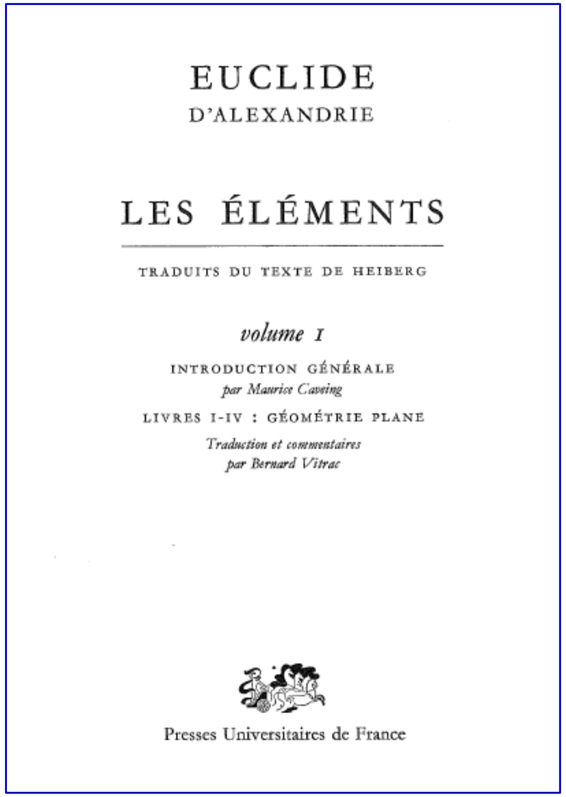
La Géométrie : quel objet ? quels objets ?

→ Enseignement (logique et raisonnement)

Vers -300

La géométrie euclidienne dans le plan repose sur cinq axiomes (aussi appelés postulats) :

1. Par deux points distincts, il passe une et une seule droite.
2. Tout segment peut être prolongé indéfiniment en une droite.
3. Pour tout segment, il existe un cercle dont le centre est une des extrémités du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une unique droite passant par ce point et parallèle à la première droite.


EUCLIDE
D'ALEXANDRIE

LES ÉLÉMENTS

TRADUITS DU TEXTE DE HEIBERG

volume I

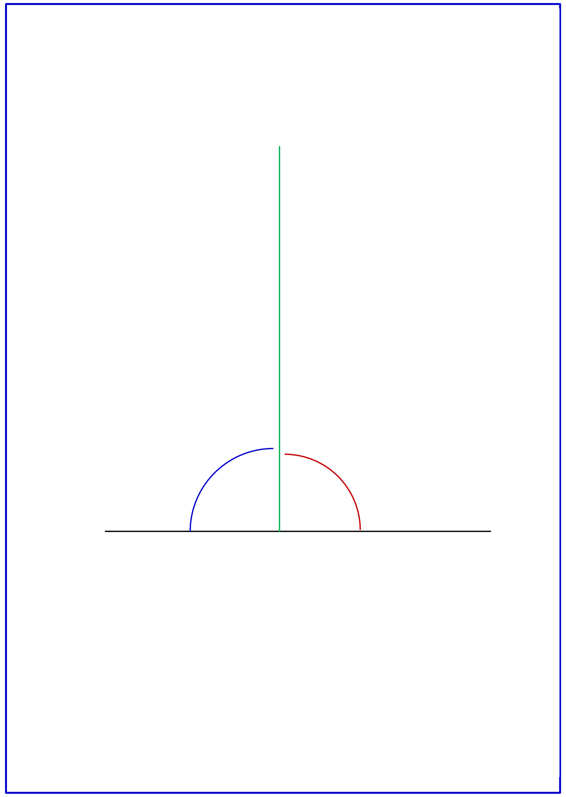
INTRODUCTION GÉNÉRALE
par Maurice Caveing

LIVRES I-IV : GÉOMÉTRIE PLANE
Traduction et commentaires
par Bernard Vitrac

Presses Universitaires de France

La géométrie euclidienne dans le plan repose sur cinq axiomes (aussi appelés postulats) :

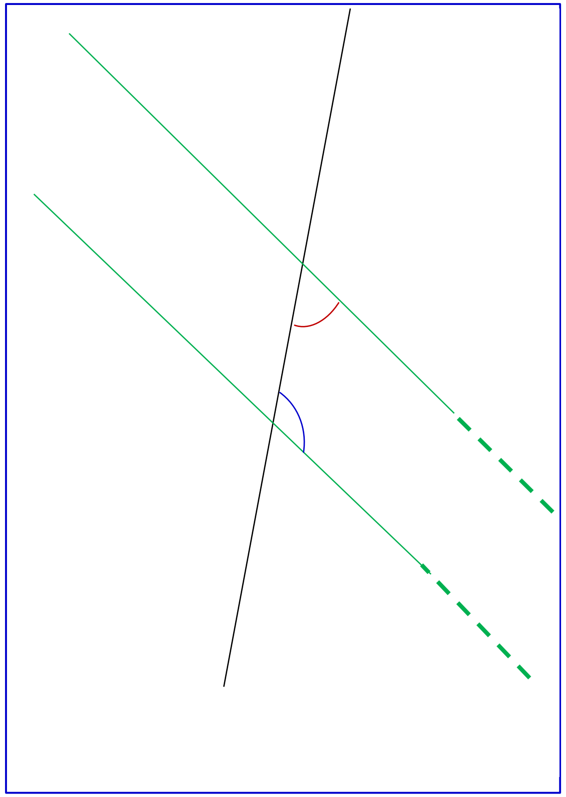
1. Par deux points distincts, il passe une et une seule droite.
2. Tout segment peut être prolongé indéfiniment en une droite.
3. Pour tout segment, il existe un cercle dont le centre est une des extrémités du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une unique droite passant par ce point et parallèle à la première droite.



1. *Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.*
2. *Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.*
3. *Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.*[8]
4. *Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.*
5. *Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.*

La géométrie euclidienne dans le plan repose sur cinq axiomes (aussi appelés postulats) :

1. Par deux points distincts, il passe une et une seule droite.
2. Tout segment peut être prolongé indéfiniment en une droite.
3. Pour tout segment, il existe un cercle dont le centre est une des extrémités du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une unique droite passant par ce point et parallèle à la première droite.



1. *Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.*
2. *Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.*
3. *Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.*[8]
4. *Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.*
5. *Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.*

1614 - 1616

Deutsches Museum, Münich

Senmout, vers -1480, Louvre E 11057

2024

La Géométrie : quel objet ?
quels objets ?

→ Mesurage

(géométrie pratique)

PROGRAMME DU 20 JUILLET 1960, confirmé par l'Arrêté du 7 mai 1963

MATHÉMATIQUES

Classe de cinquième

ÉTRIE PLANE

des résultats acquis dans la classe de cinquième.

gles. Régions séparées par la médiatrice d'un

Comparaison des segments joignant un point aux différents points d'une droite;

t une sécante.

GÉOMÉTRIE

La présentation des notions d'arithmétique et de géométrie du programme de Cinquième trouve ses points de départ dans le domaine concret ; elle doit être fondée sur des observations et des expériences, dont certaines auront pu déjà être rencontrées l'année précédente, et mériteront d'être reprises soit pour les compléter, soit pour en dégager quelques aspects nouveaux.

De nombreux exercices de dessin accompagneront l'étude des diverses chapitres de la géométrie ; ils comporteront notamment des constructions de figures, des comparaisons, des vérifications expérimentales, des mesures dont on ne manquera pas de faire ressortir le caractère limité et restreint, afin de faire peu à peu saisir la différence entre la constatation, même répétée, d'un fait particulier et une démonstration générale.

Triangle isocèle. Propriétés de la médiatrice d'un segment.
Le troisième cas d'égalité des triangles.
Cas d'égalité des triangles rectangles.

ctogone régulier
rcle donné; pour
e, existence d'un

convexe inscrit dans un cercle donné; inscription dans un cercle donné de polygones réguliers convexes de 2^n ou de 3×2^n cotés (l'étude des propriétés de ces polygones n'est pas au programme).

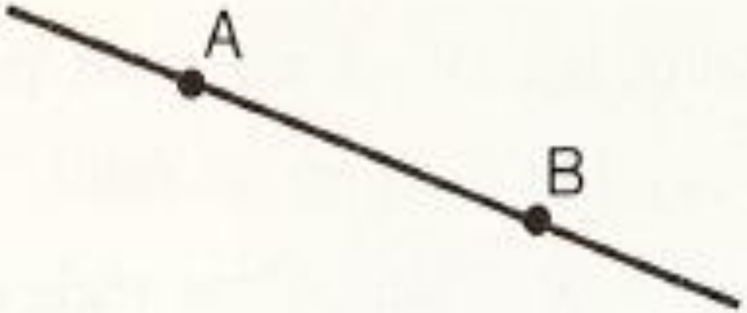
2. La droite

La trace du crayon bien taillé sur la feuille de papier peut donner l'idée d'un *point*, cette feuille elle même posée à plat sur une table, donne l'idée d'une partie d'un ensemble de points qu'on appelle un *plan*. Le plan est une partie de l'*espace*.

Axiome 3. *Il existe une droite unique qui contient deux points distincts donnés A et B.*

On dit que cette droite *passe* par les deux points et on la représente par (A B). On traduit souvent cet axiome par la phrase : deux points distincts déterminent une droite (fig. 2).

FIG. 2



Annexe au programme de Quatrième.

Géométrie de la droite.

On appelle *droite* un ensemble D d'éléments dits points, muni d'une bijection g de D sur $\mathbb{R}$ et de toutes celles f qui s'en déduisent de la manière suivante : a étant un nombre réel arbitraire, on a :

soit $$f(\mathrm{M}) = g(\mathrm{M}) + a$$

soit $$f(\mathrm{M}) = -g(\mathrm{M}) + a$$

La famille des bijections f s'appelle une structure euclidienne.

Si M, M′ sont deux points de D, le nombre positif

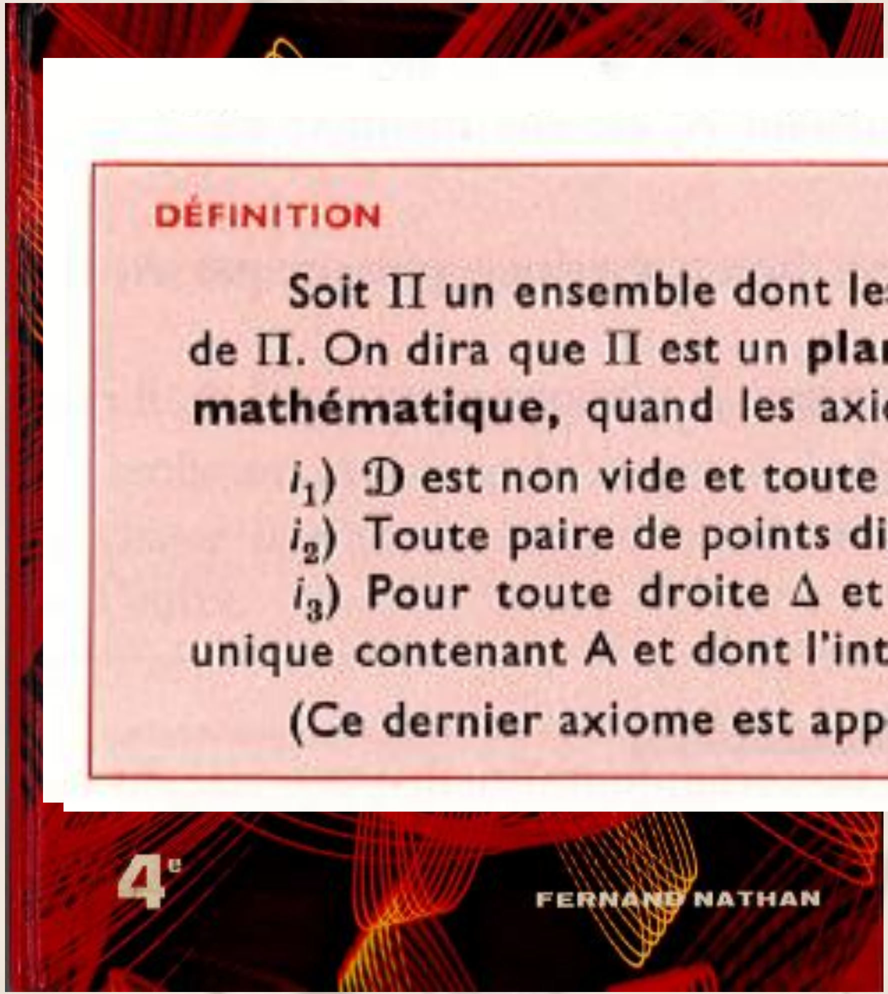
$$d(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = f(\mathrm{M}') - f(\mathrm{M})$$

ne dépend pas du choix de f et par suite ne dépend que de la structure euclidienne de D; $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ est *la distance* des deux points M et M′.

Pour une bijection f, soit A et B les points d'images respectives 0 et 1 ($f(\mathrm{A}) = 0$, $f(\mathrm{B}) = 1$). On a :

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 1.$$

Cela nous amène à penser qu'il existe, dans le plan, des droites physiques qui ne se rencontrent pas.



Édition 1973

DÉFINITION

Soit Π un ensemble dont les éléments sont appelés **points** et $\mathfrak{D}$ un ensemble de parties de Π. On dira que Π est un **plan mathématique** et que tout élément de $\mathfrak{D}$ est une **droite mathématique,** quand les axiomes suivants appelés **axiomes d'incidence** sont vérifiés.

i_1) $\mathfrak{D}$ est non vide et toute droite Δ de $\mathfrak{D}$ est une partie propre non vide de Π.

i_2) Toute paire de points distincts est incluse dans une droite et une seule.

i_3) Pour toute droite Δ et tout point A n'appartenant pas à Δ, il existe une droite unique contenant A et dont l'intersection avec Δ soit vide.

(Ce dernier axiome est appelé axiome d'Euclide.)

glisser la r…
l'autre.

fig. 2

fig. 5

3 LES RÈGLES DU JEU MATHÉMATIQUE

Nous venons de constater expérimentalement un certain nombre de propriété du « *plan physique* » de ses éléments : les « *points physiques* » et de certaines de ses parties les « *droites physiques* ». Toutefois quand nous avons fait les tracés le long de deux arêtes d'une même règle, on a pu prolonger un peu ces tracés, mais limités par les dimensions de la feuille ou de la table, il a quand même fallu faire un effort d'imagination pour concevoir un tracé illimité idéal à propos duquel, l'esprit convenait assez naturellement, que l'intersection de ces ensembles idéaux était vide. Pour le « *point physique* » on sait aussi que la trace du crayon, vue à la loupe, apparaît trop étendue pour que l'esprit l'admette comme un « *point* » modèle.

II. GÉOMÉTRIE PLANE

L'étude de la géométrie est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation, lesquelles requièrent l'usage des instruments de dessin: règle graduée, compas, équerre; l'effort de réflexion qu'elles suggèrent conduit au raisonnement déductif.

Le programme est rédigé en termes d'acquisition, non de progression. Il revient au professeur de suivre une ligne cohérente, mais aucun choix d'hypothèses ne lui est imposé. Il a notamment toute latitude pour faire intervenir, dès que cela lui paraît opportun, les notions de distance, de cercle, de parallélisme, d'orthogonalité, qui ont été introduites jusque-là de façon intuitive.

Droites du plan; demi-droites.

Abscisse d'un point d'une droite dans un repère de cette droite; notation $\overline{MN}$; relation de Chasles.

Médiatrice; sa construction. Losange; triangle isocèle.

Symétrie orthogonale par rapport à une droite. Rectangle.

Parallélisme, orthogonalité.

Projection sur une droite selon une direction; conservation du milieu par projection. Projection orthogonale; distance d'un point à une droite.

Parallélogramme. Symétrie centrale.

Coordonnées d'un point du plan dans un repère quelconque.

Translation; composition des translations. Vecteurs; addition des vecteurs.

Programme 1978

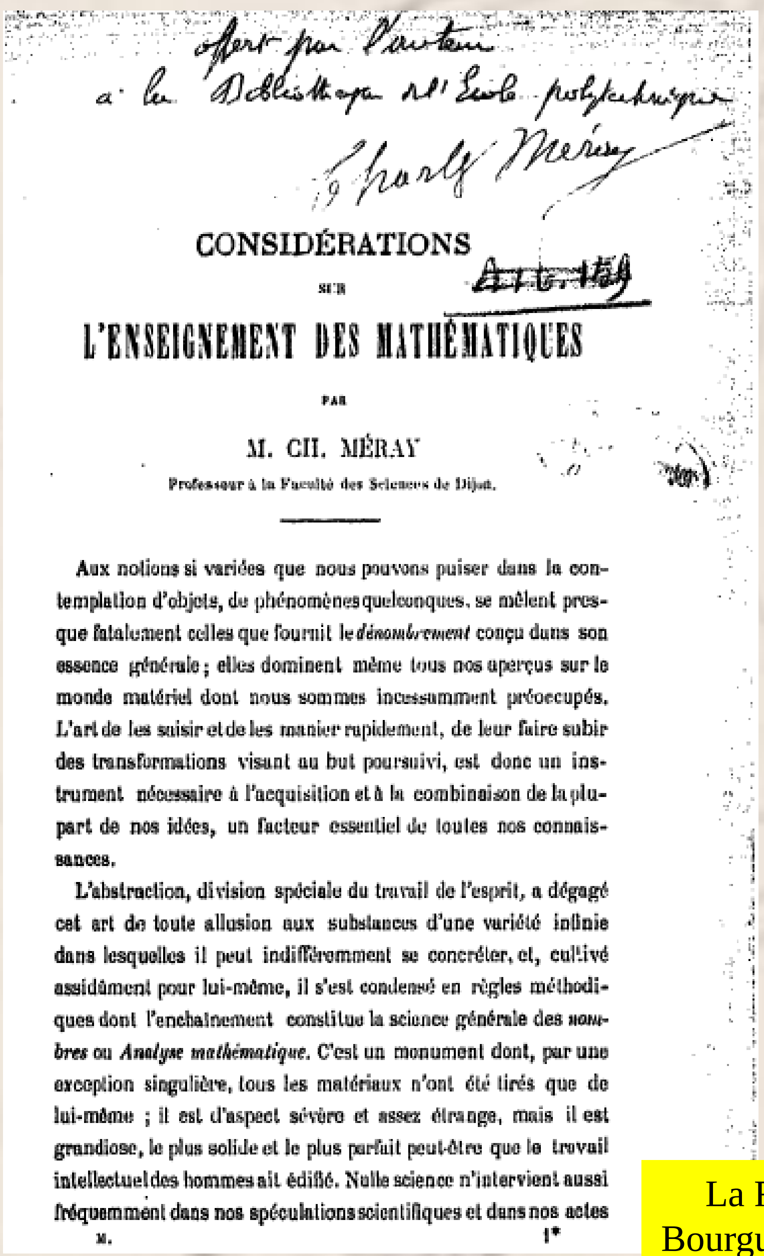
2024

La Géométrie : quel objet ?
quels objets ?

→ Figures

(et démonstrations)

Charles Méray (1835 – 1911)



offert par l'auteur
à la Bibliothèque de l'École polytechnique
Charly Méray

CONSIDÉRATIONS

SUR

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

PAR

M. CH. MÉRAY

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Aux notions si variées que nous pouvons puiser dans la contemplation d'objets, de phénomènes quelconques, se mêlent presque fatalement celles que fournit le *dénombrement* conçu dans son essence générale ; elles dominent même tous nos aperçus sur le monde matériel dont nous sommes incessamment préoccupés. L'art de les saisir et de les manier rapidement, de leur faire subir des transformations visant au but poursuivi, est donc un instrument nécessaire à l'acquisition et à la combinaison de la plupart de nos idées, un facteur essentiel de toutes nos connaissances.

L'abstraction, division spéciale du travail de l'esprit, a dégagé cet art de toute allusion aux substances d'une variété infinie dans lesquelles il peut indifféremment se concréter, et, cultivé assidûment pour lui-même, il s'est condensé en règles méthodiques dont l'enchaînement constitue la science générale des *nombres* ou *Analyse mathématique*. C'est un monument dont, par une exception singulière, tous les matériaux n'ont été tirés que de lui-même ; il est d'aspect sévère et assez étrange, mais il est grandiose, le plus solide et le plus parfait peut-être que le travail intellectuel des hommes ait édifié. Nulle science n'intervient aussi fréquemment dans nos spéculations scientifiques et dans nos actes

M. 1*

La Revue Bourguignonne 1892

Quant à la Géométrie élémentaire, semblable à ces maniaques dont les maisons s'encombrent de vieilleries rapiécées, montrées à tout venant, conservées et maniées comme d'inestimables joyaux, elle croit encore se parer en se chargeant d'objets enfantins que vingt siècles ont défraîchis.

A force de la trouver muette sur l'espace à trois dimensions, l'adepte croirait volontiers qu'il n'existe pas.

offert par l'auteur
à la Bibliothèque de l'École polytechnique
Charles Méray

L'acquisition de ce bagage à la fois léger et

Il en sera ce qu'il pourra, mais j'ai cru remplir un devoir de ma modeste charge, en dénonçant ainsi l'édifice inhospitalier et déplaisant des Mathématiques classiques, au Public comme à tout Ministre qui serait particulièrement désireux d'élever partout le niveau de cet enseignement et d'en rendre les parties les plus indispensables, pour la première fois vraiment populaires.

par des connaissances inutiles.

ques dont l'enchaînement constitue la science générale des *nombres* ou *Analyse mathématique*. C'est un monument dont, par une exception singulière, tous les matériaux n'ont été tirés que de lui-même ; il est d'aspect sévère et assez étrange, mais il est grandiose, le plus solide et le plus parfait peut-être que le travail intellectuel des hommes ait édifié. Nulle science n'intervient aussi fréquemment dans nos spéculations scientifiques et dans nos actes

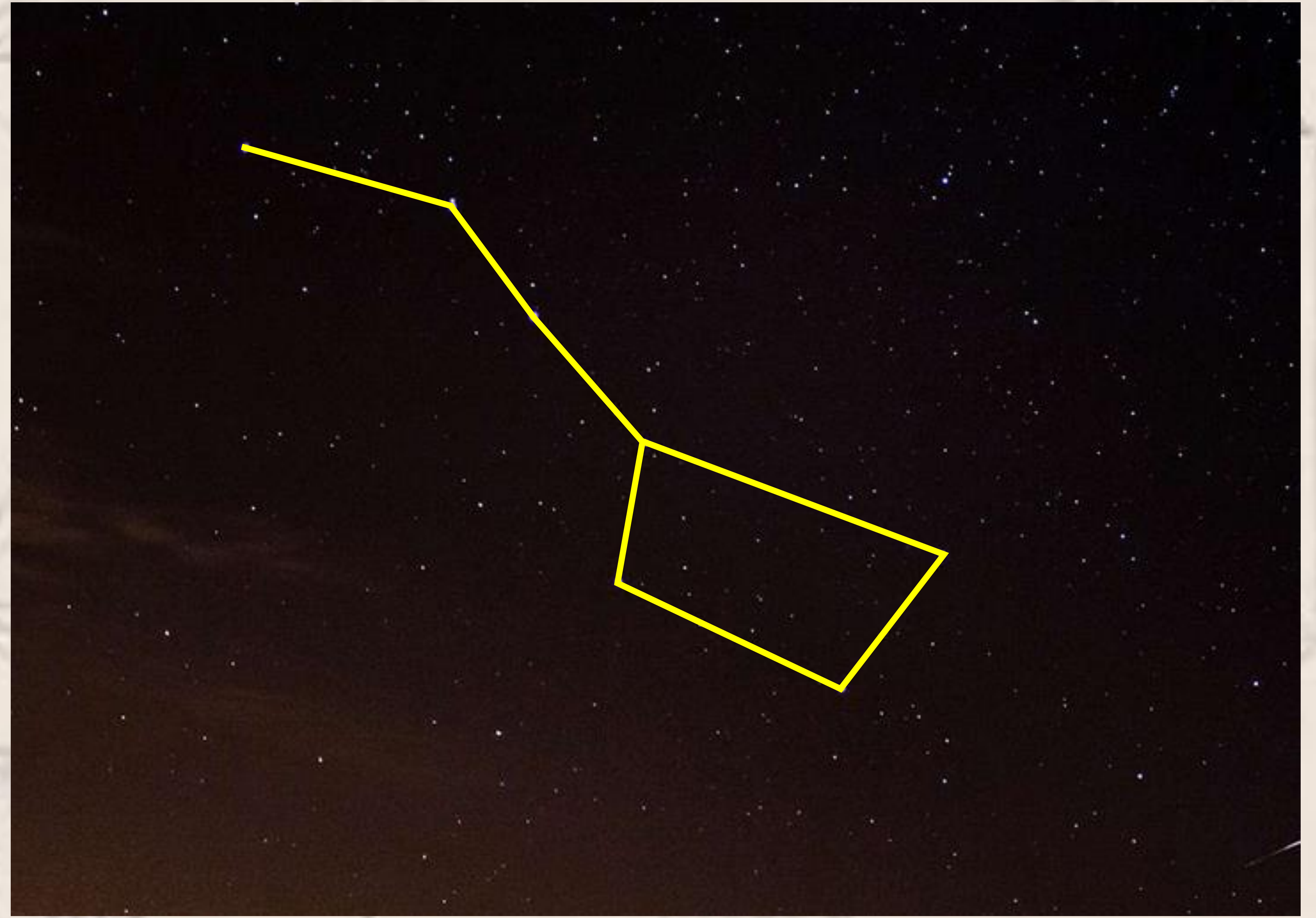
La Géométrie : quel objet ?
quels objets ?

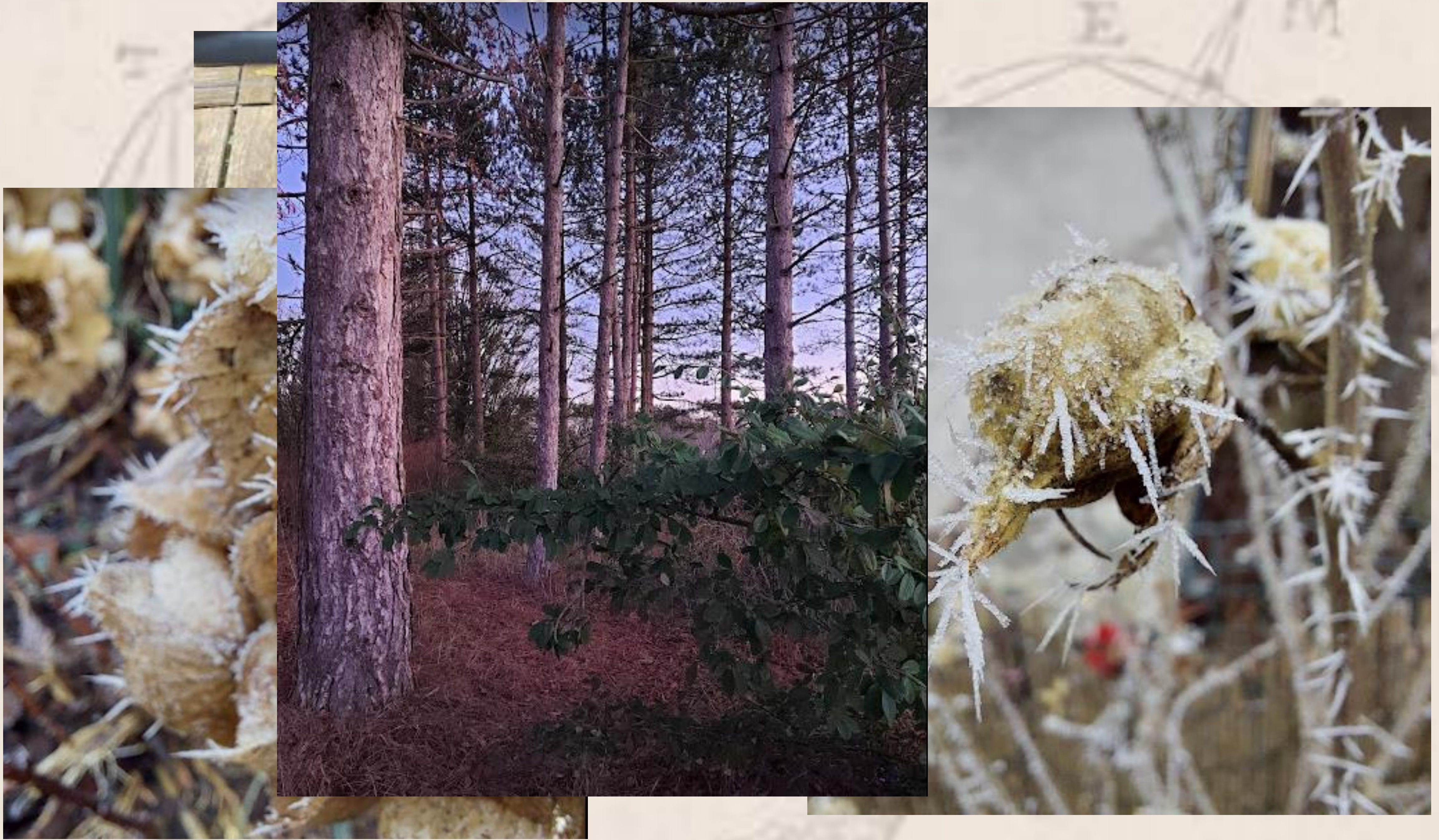
Il n'y a pas de lignes droites ou d'angles vifs dans la nature. Par conséquent, les bâtiments ne doivent pas avoir de lignes droites ni d'angles vifs.

Antoni Gaudi

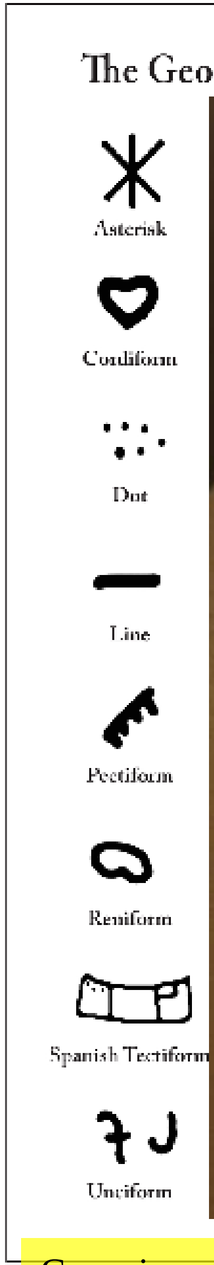
Architecte, Artiste (1852 - 1926)

https://citation-celebre.leparisien.fr/citations/272004#google_vignette






A
T
Y
B
I
V
C
O
N
E
M
P
S
K
R
G


The Geometric Signs of Ice

Asterisk

Cordiform

Dot

Line

Pectiform

Reniform

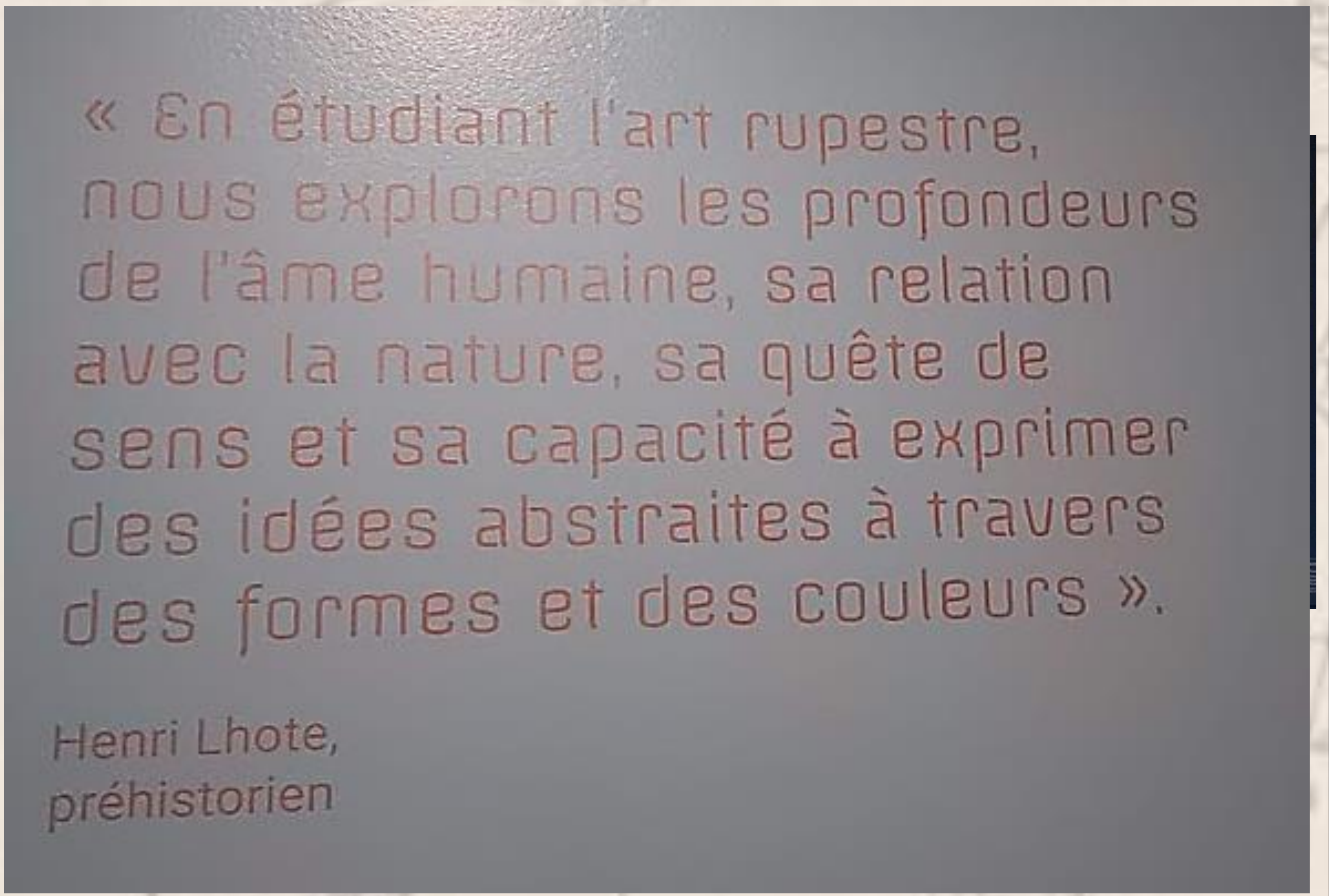
Spanish Tectiform

Unciform

Genevieve von Petzinger, *The f*

Arudy, MAN


Maz d’Azil (facs), MAN


« En étudiant l'art rupestre,
nous explorons les profondeurs
de l'âme humaine, sa relation
avec la nature, sa quête de
sens et sa capacité à exprimer
des idées abstraites à travers
des formes et des couleurs ».
Henri Lhote,
préhistorien



La Mou

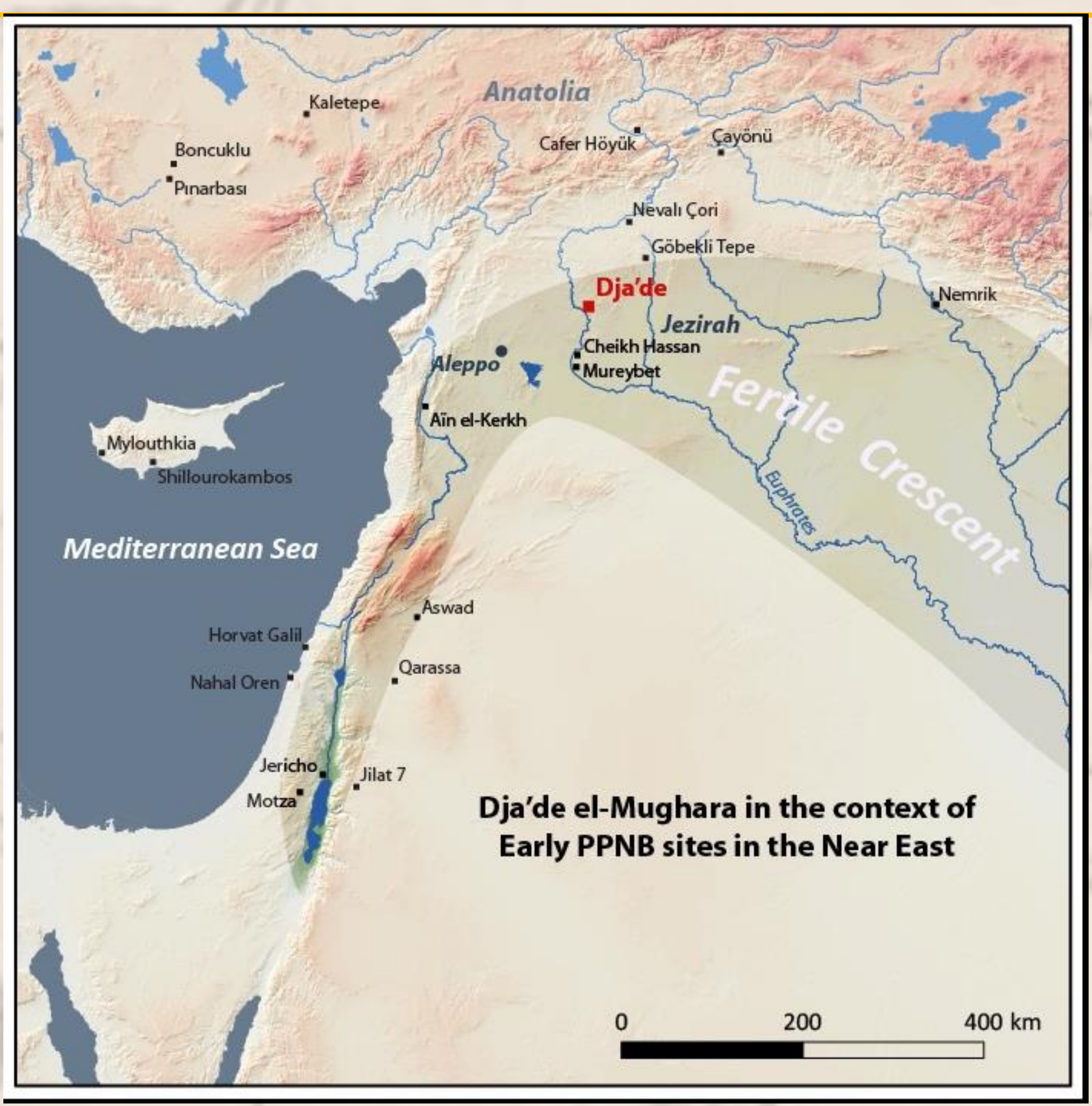
nac, coll. Wendel

Lascaux, coll. Don Hitchcock

2024

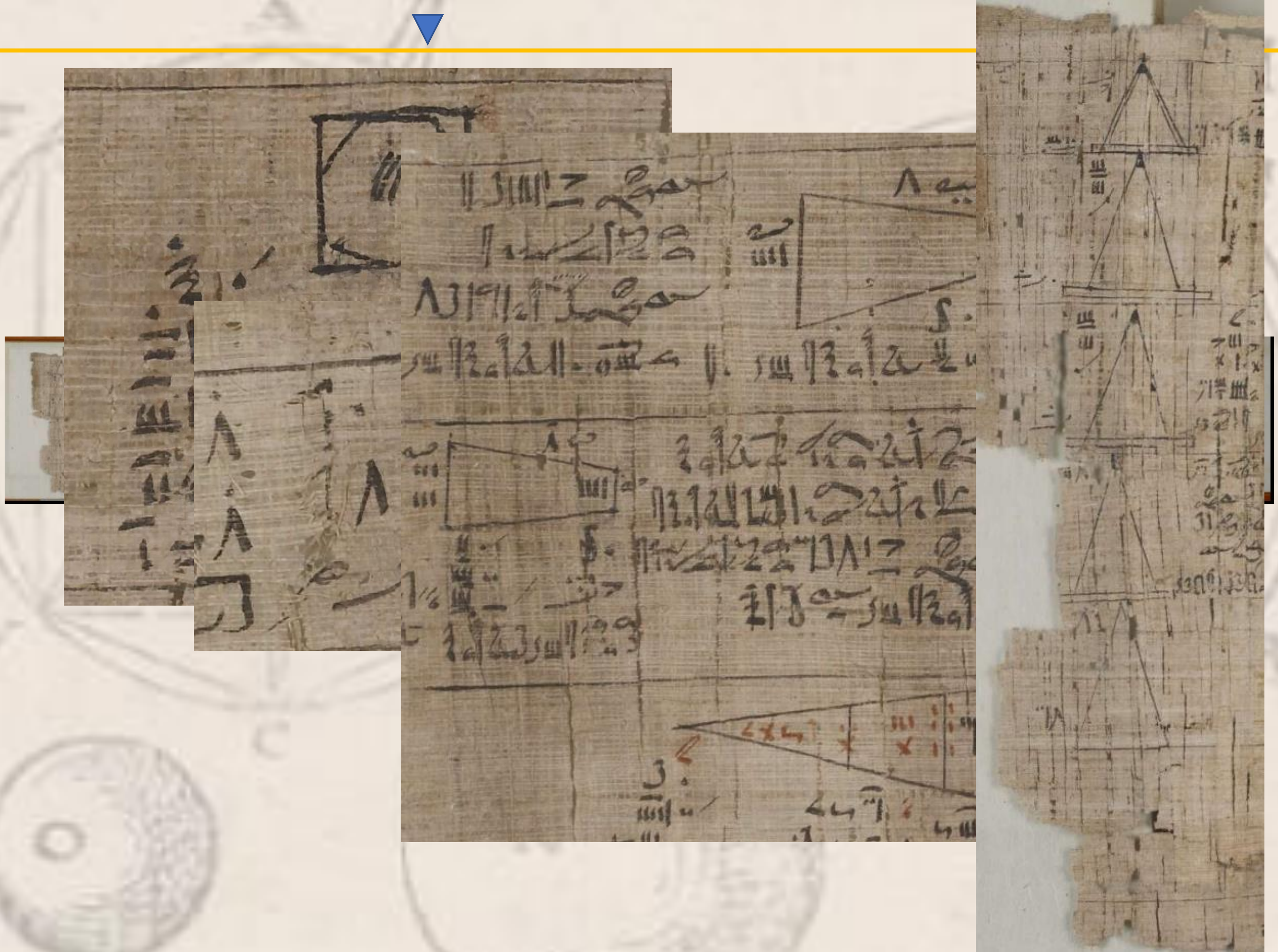
La Géométrie : quel objet ?
quels objets ?

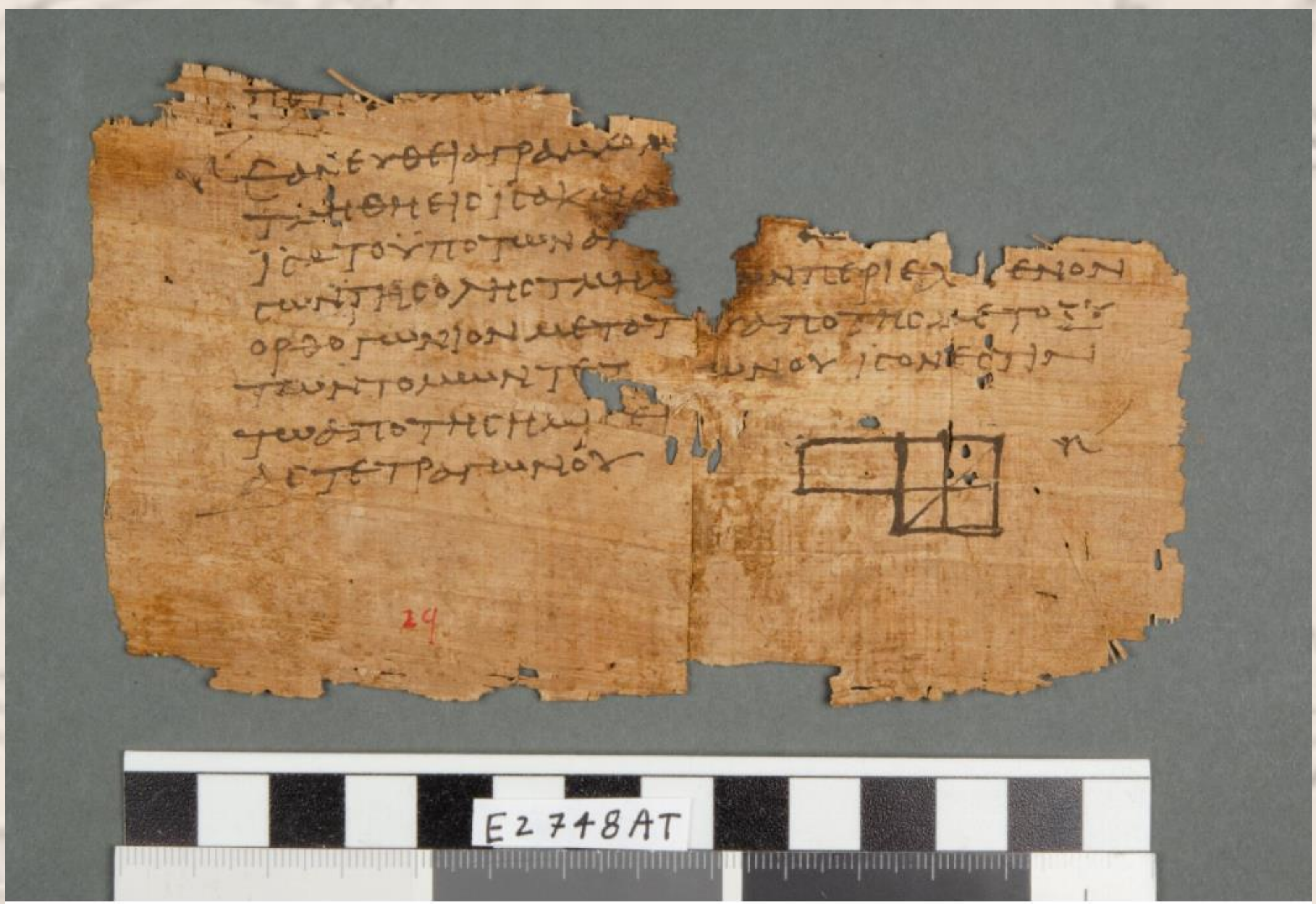
→ Formes


Anatolia
Kaletepe
Boncuklu
Pınarbası
Cafer Höyük
Çayönü
Nevalı Çori
Göbekli Tepe
Dja'de
Nemrik
Jezirah
Cheikh Hassan
Mureybet
Aleppo
Aïn el-Kerkh
Fertile Crescent
Euphrates
Mylouthkia
Shillourokambos
Mediterranean Sea
Aswad
Horvat Galil
Qarassa
Nahal Oren
Jericho
Jilat 7
Motza
Dja'de el-Mughara in the context of
Early PPNB sites in the Near East
0
200
400 km

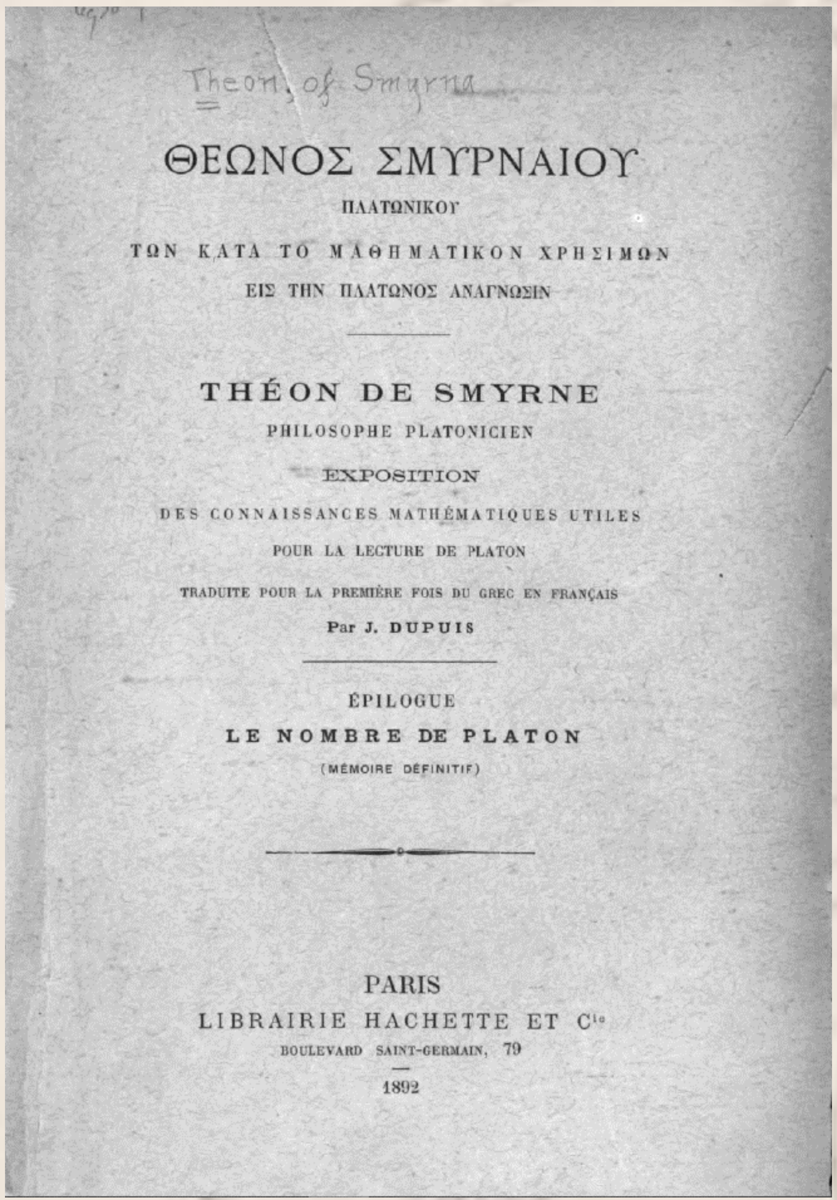
British Museum, 15 285, ~ 2000-1500 BCE

Louvre, 1O 19915, seuil de porte, Ninive, Palais nord, ~ 700-600 BCE





University of Pennsylvania, E 2748, ~ 75-100 CE


Theon of Smyrna

ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ

ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ

ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES

POUR LA LECTURE DE PLATON

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

Par J. DUPUIS

ÉPILOGUE

LE NOMBRE DE PLATON

(MÉMOIRE DÉFINITIF)

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET C^ie

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1892

PennState UL, Google Books

[...] dans tous les genres il y a un certain élément propre, ou un principe, dans lequel tous les autres se résolvent, tandis que lui-même ne se résout en aucun d'eux.

Or ce principe est nécessairement indécomposable et indivisible.

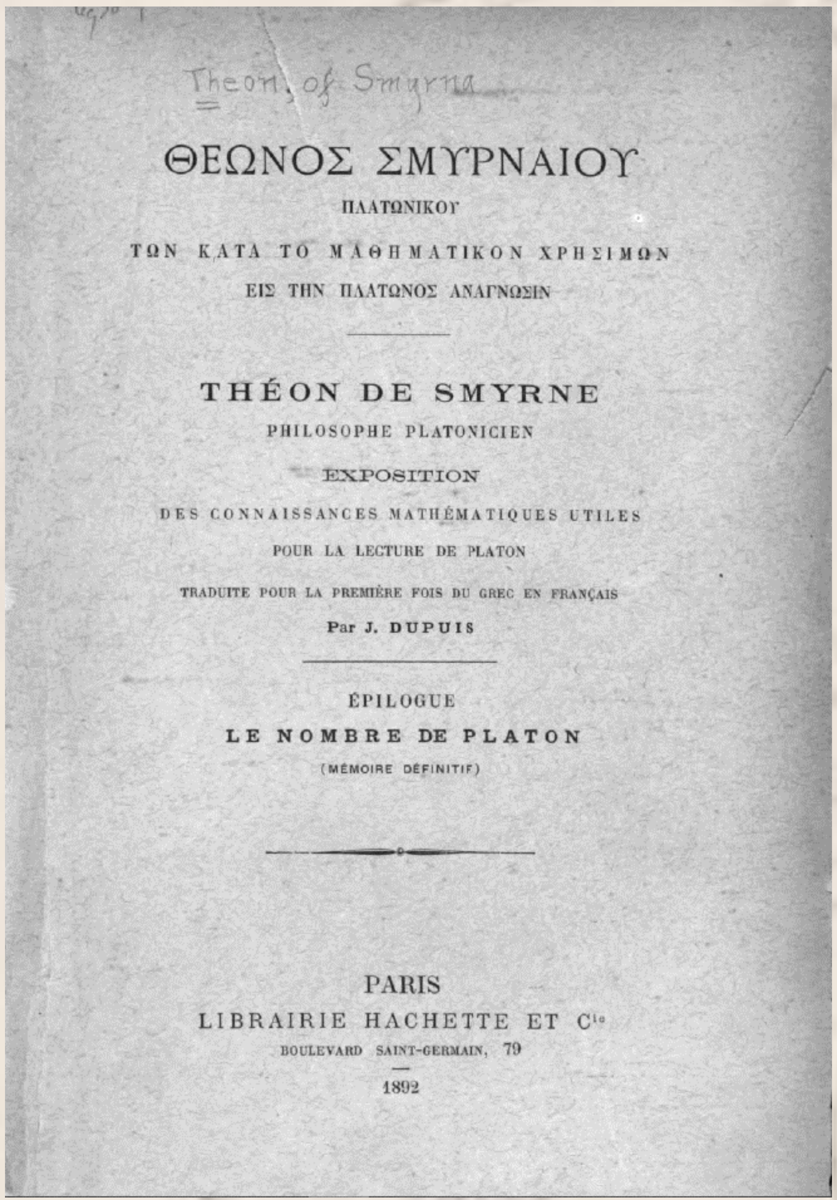
p.135

Ainsi l'élément de la quantité est l'unité, celui de la grandeur est le point, celui du rapport et de la proportion est l'égalité.

Car l'unité ne peut pas se diviser en quantité, ni le point en grandeur, ni l'égalité en rapports multiples.

Le nombre naît de l'égalité, la ligne du point, le rapport et la proportion de l'égalité ; mais ce n'est pas de la même manière.

p.135



Theon of Smyrna

ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ

ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ

ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES

POUR LA LECTURE DE PLATON

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

Par J. DUPUIS

ÉPILOGUE

LE NOMBRE DE PLATON

(MÉMOIRE DÉFINITIF)

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie

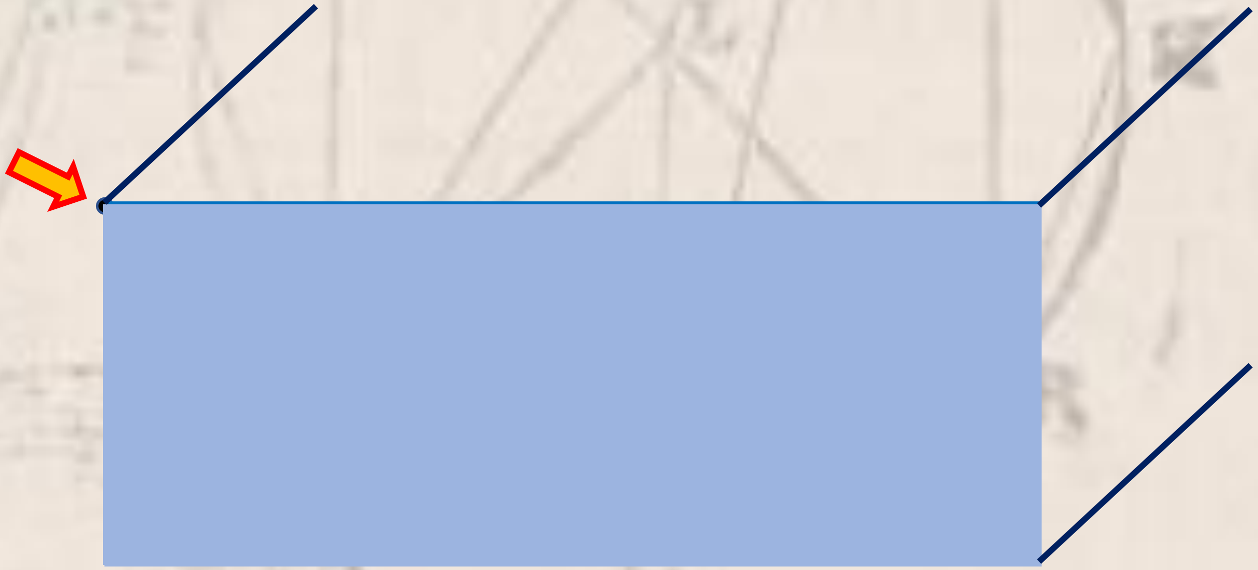
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

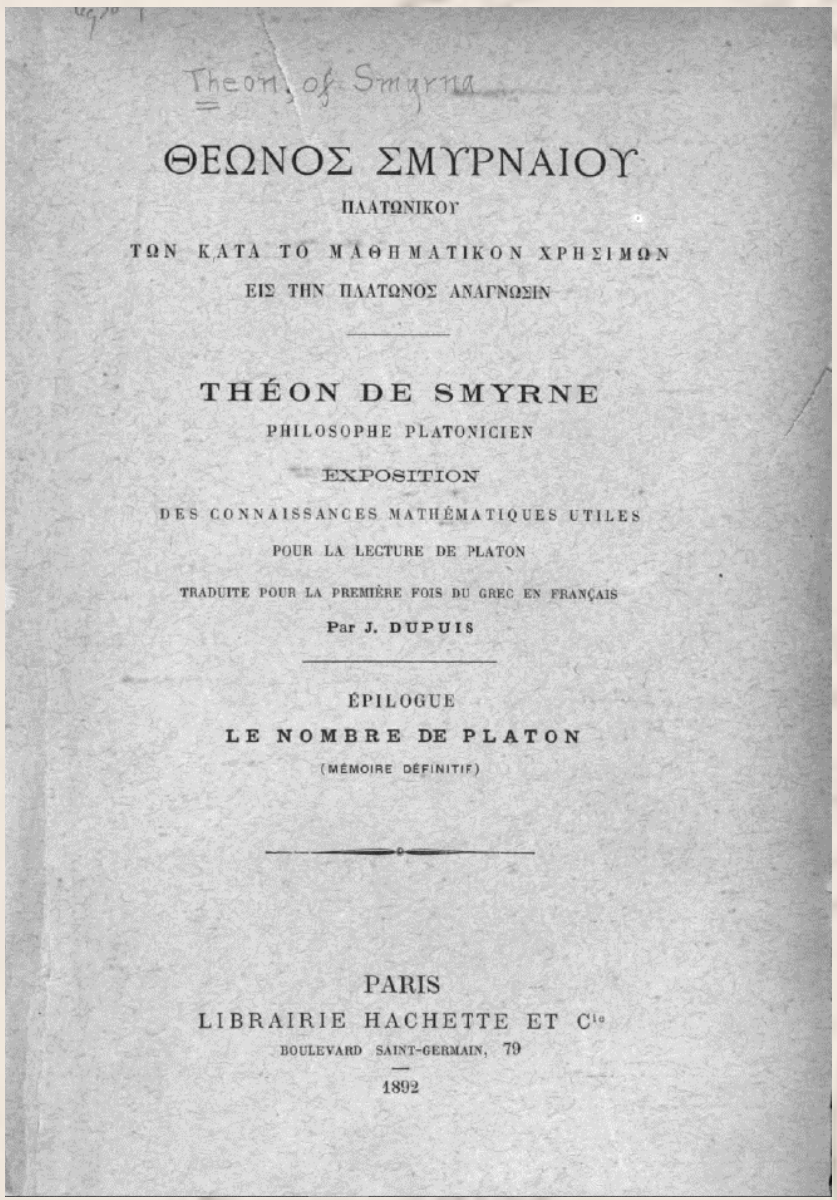
1892

Quant au point, ce n'est ni par la multiplication, ni par l'addition qu'il forme la ligne, mais par un mouvement continu, de même que la ligne forme la surface, et la surface le solide[...]

Ainsi le point n'est pas une partie de la ligne, ni l'égalité une partie du rapport.

p.137





Theon of Smyrna

ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ

ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ

ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES

POUR LA LECTURE DE PLATON

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

Par J. DUPUIS

ÉPILOGUE

LE NOMBRE DE PLATON

(MÉMOIRE DÉFINITIF)

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET C^{ie}

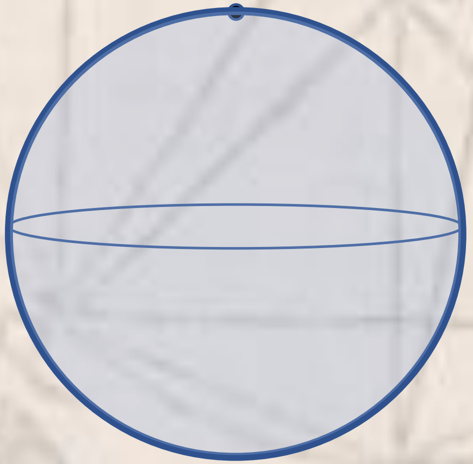
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1892

Quant au point, ce n'est ni par la multiplication, ni par l'addition qu'il forme la ligne, mais par un mouvement continu, de même que la ligne forme la surface, et la surface le solide[...]

Ainsi le point n'est pas une partie de la ligne, ni l'égalité une partie du rapport.

p.137




LOGIQUE
D'ARISTOTE
TRADUITE
EN FRANÇAIS POUR LA PREMIÈRE FOIS
ET ACCOMPAGNÉE DE NOTES PERPÉTUELLES
PAR
J. BARTHÉLEMY SAINT-HILAIRE
MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE GRECQUE ET LATINE
TOME IV
TOPIQUES,
RÉFUTATIONS DES SOPHISTES
PARIS
LIBRAIRIE DE LADRANGE
QUAI DES AUGUSTINS
M DCCC XLIII
Remacle.org

On peut comprendre de deux manières qu'on n'ait pas donné la définition par les choses plus connues ; car c'est, ou par des choses plus inconnues en soi, ou plus inconnues pour nous ; et ces deux cas pourront se présenter.

L'antérieur est absolument plus connu que le postérieur ; et, par exemple, le point est plus connu que la ligne, la ligne que la surface, la surface que le solide [...]

Mais par rapport à nous, il arrive quelquefois tout le contraire ; car le solide tombe davantage sous la sensation, la surface plus que la ligne, et la ligne plus que le point.

Ce sont ces choses là mêmes que le vulgaire connaît mieux ; car on peut apprendre les unes avec une intelligence ordinaire, les autres en demandent une qui soit exacte et distinguée.

Topiques, Livre VI, chapitre IV

La géométrie (plane)

Créer, modifier, reproduire des formes

Décrire, nommer, classifier les formes

Déterminer les tracés fondamentaux et définir les gestes techniques

Formuler les propriétés caractéristiques (et les autres) → mesure ?

Formuler des théorèmes ; les démontrer

Mesurer (directement ; à distance)